TITLE:
閉路を含むネットワーク上の結合型最短経路問題(連続と離散の最適化数理)

AUTHOR(S):
丸山, 幸宏

CITATION:
丸山, 幸宏. 閉路を含むネットワーク上の結合型最短経路問題(連続と離散の最適化数理). 数理解析研究所講究録 1997, 981: 114-124

ISSUE DATE:
1997-03

URL:
http://hdl.handle.net/2433/60889

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
981 巻 1997 年 114-124

閉路を含むネットワーク上の結合型最短経路問題

長崎大教養　丸山幸宏 (Yukihiro Maruyama)

1 序

閉路を含む加法型の最短経路問題（道の長さがその道に含まれる枝の長さの和である問題）においては、最短経路の存在性を保証するため、ネットワークが負閉路を含まないことが仮定されているかまたはそれがあるならばいかに検出するかが問題になる。それでは一般の非加法型の最短経路問題の場合、最短経路の存在性を保証するにはいかなる条件が必要であろうか。また加法型問題では全ての枝の長さが非負である場合（負閉路を含まないことが保証されるが）最短路長、経路を求める方法としてダイクストラ法が代表的なものであるが、もし負の長さをもつ枝が存在するときはこの方法は使えない。その場合の解法としてはフォード法が知られている。それでは、一般の非加法型問題においても、加法型問題の場合のフォード法に相当する解法で最短路長、最短経路がもとまるであろうか。本研究ではこれらの疑問に答えて行きたい。

第 2 節では、非加法型問題として、様々な型の問題を含む結合型（最短経路）問題について述べる。第 3 節では結合型問題における、最短経路の存在性を保証する条件（必要十分条件）を求める。さらに第 4 節では加法型問題の場合のフォード法に相当する解法により、結合型問題における最短路長、最短経路をもとめる。

2 結合型最短経路問題

加法型問題のみならず様々な非加法型問題を含む次の問題を考える。有向グラフ $G=(V,A)$, 始点 1, 終点 N が与えられているとする。また各枝 $(i,j)\in A$ には各々、枝長 t_{ij} が与えられている。頂点 i から頂点 n への道 $(i,j,k,\ldots,m,n)$ の長さを

$$t_{ij}\circ t_{jk}\circ\cdots\circ t_{mn}$$

で定義する。ただし、$\circ: R^1\times R^1\to R^1$ は結合法則：$(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$ をみたす 2 項演算である。このとき次のような問題を考える：

$$\min_p[t_{1j}\circ t_{jk}\circ\cdots t_{mN}],\quad p=(1,j,k,\ldots,m,N). \tag{1}$$

このような問題を結合型 (最短経路) 問題と呼ぶことにする。これまでに丸山 ([1], [2], [3]) は閉路を含まないネットワーク上の結合型問題の解法を求めたがここでは閉路を含む場合の解法を与える。ここで問題 (1) は以下の仮定を満たすものとする：仮定 1: 集合 S は 2 項演算 $\circ$ に関して半群であり（$\circ: S\times S\to S$), 各 $i,j\in V$ に対して $t_{ij}\in S$ とする。仮定 2: 2 項演算 $\circ$ は可換律: 任意の $a,b\in S$ にたいして $a\circ b=b\circ a$ を満たす。仮定 3 : 集合 S は単位元 $R(\circ)$ をもつ。仮定 4: 各 $a\in S$ にたいして

$$a_1,a_2\in S,\ a_1<a_2 \implies a\circ a_1<a\circ a_2,$$

が成り立つ。仮定5: $R(\circ) > b$ を満たす $b \in S$ にたいして次が成り立つ:

$$\lim_{n\to\infty}[a \circ (b)^n] = I_{-\infty} = \inf S, \quad a \in S,$$

ただし

$$(b)^n = \underbrace{b \circ b \circ \cdots \circ b}_{n \text{ times}}.$$

結合型問題には以下のように様々な型の問題が含まれる。

[加法型] $\circ = +$ の場合で、$t_{ij} \in S = R^1$, $R(+) = 0 \in S$ にたいして仮定1〜仮定3をみたす。また仮定4は明らかに成り立つ。さらに仮定5は $0 > b$ ならば

$$\lim_{n\to\infty}[a + nb] = -\infty = \inf R$$

なので成り立つ。

[乗法型] $\circ = \times$ の場合で、$t_{ij} \in S = (0, +\infty), R(\times) = 1 \in S$ にたいして仮定1〜仮定3をみたす。また仮定4は $a > 0$ にたいして明らかに成り立つ。さらに仮定5は $1 > b > 0$ ならば

$$\lim_{n\to\infty}[a \times b^n] = 0 = \inf S \notin S$$

なので成り立つ。

[2パラメータ乗加法型] 加法、乗法を統合するものとして次のような2パラメータ を含む2項演算を定義する。

$$a \circ b = f(s, t; a, b) = (a + b + s)(1 + st) + tab \quad a, b \in R^1,$$

ただし $s,\ t \in R^1$ である。この演算は結合法則をみたし、単位元 $-s$ をもつ。各パラメータ s, t にたいして $\circ$ は次のような2項演算である：

$$f(0, 0; a, b) = a + b, \quad f(-1, 1; a, b) = ab, \quad f(0, 1; a, b) = a + b + ab,$$

$$f(0, -1; a, b) = a + b - ab, \quad f(-1, -1; a, b) = 2(a + b - 1) - ab.$$

上記演算で道の長さが定義された問題は、

$$\begin{aligned} t_{ij} \in S &= (-(1 + st)/t, +\infty), R(\circ) = -s \in S \quad (t > 0), \\ t_{ij} \in S &= (-\infty, -(1 + st)/t), R(\circ) = -s \in S \quad (t < 0), \\ t_{ij} \in S &= R^1, R(\circ) = -s \in S \quad (t = 0) \end{aligned}$$

という各々の場合にたいして仮定1〜仮定3をみたす。また仮定4は

$$\frac{\partial f}{\partial b} = 1 + t(a + s) > 0 \ (a \in S)$$

なので成り立つことがわかる。さらに $b < -s = R(\circ)$ をみたす $b \in S$ にたいして

$$\lim_{n\to\infty}[a \circ (b)^n] = \begin{cases} -(1+st)/t, & \text{for } t > 0 \\ -\infty, & \text{for } t < 0 \end{cases}$$

が成立するので、この演算は仮定5をみたす。

さらに 結合型問題には、次のような問題も含まれる。
[2パラメータ分数型]

$$a \circ b = g(s,t;a,b) = \frac{a+b+2t}{1+s^2(a+t)(b+t)} - t,$$

ただし $s > 0,\ t \in R^1$ である。この演算は結合法則をみたし、単位元 $-t$ をもつ。各パラメータ s,t にたいして $\circ$ は次のような2項演算である：

$$g(1,0;a,b) = \frac{a+b}{1+ab},\quad g(1,-1;a,b) = \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)},$$

$$g(\frac{1}{2},0;a,b) = \frac{4(a+b)}{4+ab},\quad f(\frac{1}{2},2;a,b) = \frac{-2ab}{4+(2+a)(2+b)}.$$

上記演算で道の長さが定義された問題は、

$$t_{ij} \in S = \left(-t-\frac{1}{s}, -t+\frac{1}{s}\right),\ -t = R(\circ)$$

にたいして仮定1～仮定3をみたす。また仮定4は

$$\frac{\partial g}{\partial b} = \frac{(1-st-as)(1+st+as)}{\{1+s^2(a+t)(b+t)\}^2} > 0\ (a \in S)$$

なので成り立つことがわかる。さらに $b < -t = R(\circ)$ をみたす $b \in S$ にたいして

$$\lim_{n\to\infty}[a \circ (b)^n] = -t - \frac{1}{s} = \inf S \ \notin S$$

が成立するので、この演算は仮定5をみたす。

3　最短経路が存在するための必要十分条件

頂点 i から 終点 N への道 $p = (i,j,\ldots,j,k,\ldots,k,l,\ldots,n,N)$ が閉路 $(j,j(1),j(2),\ldots,j(s),j)$, $(k,j'(1),j'(2),\ldots,j'(t),k),\ldots$ を含んでいるとする。このとき各閉路の長さ $(t_{jj(1)} \circ t_{j(1)j(2)} \circ \cdots \circ t_{j(s)j},\ldots)$ を 各々 C_p, C'_p, ..., と表す。また、道 p からすべての閉路を取り除いてできる単純路 (simple path) : $(i,j,k,l,\ldots,n,N)$ の長さを S_p と表すことにする。このとき仮定2より閉路を含んだ道 p の長さは $S_p \circ C_p \circ C'_p \circ \cdots$ に等しいことに注意すると次が成立する。

命題 1

頂点 i から 終点 N への道 p は 1 つの閉路を含みその長さを C_p とする。
さらに、$\inf S = I_{-\infty} \notin S$ とする。このとき、
(i) もし $R(\circ) \le C_p$ ならば

$$\begin{aligned} S_p \le S_p \circ C_p &\le S_p \circ (C_p)^2 \le \cdots \\ &\le S_p \circ (C_p)^n \le S_p \circ (C_p)^{n+1} \le \cdots, \end{aligned} \tag{2}$$

(ii) もし $R(\circ) > C_p$ ならば i から N への最短経路は存在しない。

(i) より頂点 i から 終点 N への道に含まれる閉路の値 C_p が全て $R(\circ) \le C_p$ ならば i から N への最短経路は単純路のなかに存在することがわかる。さらに (ii) が成立するので最短経路の存在性を保証する条件（必要十分条件）は 長さ C_p が $C_p < R(\circ)$ をみたす閉路は存在しないことである。

各型の問題において存在性を保証する条件は以下の通りである。

[加法型] $C_p < 0$ なる閉路は含まない、

[乗法型] $C_p < 1$ なる閉路は含まない、

[2 パラメータ乗加法型] $C_p < -s$ をみたす閉路は含まない、

[2 パラメータ分数型] $C_p < -t$ をみたす閉路は含まない。

4 逐次列の構成 (フォード法)

前節で述べたように最短経路が存在するための必要十分条件は長さ C_p が $C_p < R(\circ)$ をみたす閉路は存在しないことであるが、もし任意の枝の長さ t_{ij} が $t_{ij} \ge R(\circ)$ を満たせばこの条件は成り立つ。加法型の場合で言えば $\forall t_{ij} \ge 0$ を満たせばよい。この場合、最短経路を求めるアルゴリズムとしてダイクストラ法が代表的なものである。しかしこの方法は $t_{ij} < 0$ なる枝がある場合は使えない。この場合、最短経路を求める方法の一つとしてフォード法が知られている。本研究でも $t_{ij} < R(\circ)$ なる枝を含むネットワークを扱うので、$R(\circ) > C_p$ をみたす閉路は存在しないという条件の下、フォード法により結合型最短経路問題を解く。

以下のように、最短経路の長さに収束する逐次列を構成する：

$$k = 0 : f_i^{(0)} = \begin{cases} t_{iN} & \text{if } i \in I(N), \\ I_\infty, & \text{if } i \notin I(N), \end{cases} \quad i \ne N, \quad f_N^{(0)} = R(\circ), \tag{3}$$

$$k \ge 1 : f_i^{(k)} = \min_{j \in D(i)} \left[t_{ij} \circ f_j^{(k-1)} \right], \quad f_N^{(k)} = R(\circ), \tag{4}$$

ただし、$I_\infty = \sup S,\ \ I(N) = \{i \in V | (i, N) \in A\},\ \ D(i) = \{j \in V | (i, j) \in A\}.$

補題 1

各 $a \in S$ にたいして

$$a \circ I_\infty = \lim_{b \to I_\infty} (a \circ b) = I_\infty$$

が成り立つとする。このとき各 i にたいして

$$f_i^{(n)} = I_\infty \text{ かまたは } f_i^{(n)} \in S, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{5}$$

である。

命題 2

各 $a \in S$ にたいして $a \circ I_\infty = I_\infty$ とし、$I_\infty \notin S$ とする。このとき (3) ~ (4) で構成される逐次列 $\{f_i^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ $(i \in V)$ において $f_i^{(n)} \in S$ となるための必要十分条件は、i から 終点 Nへの道で $n+1$ 個以下の枝を含むものが存在することである。また $f_i^{(n)} \in S$ の場合は

$$f_i^{(n)} = \min_{p,\ l \le n} [t_{ij_1} \circ t_{j_1 j_2} \circ \cdots \circ t_{j_l N}] \tag{6}$$

が成立する。ただし、$p = (i, j_1, j_2, \ldots, j_l, N)$ である。

この (6) 式および命題 1 (i) より、次のことが成立する：

定理 1

各 $a \in S$ にたいして $a \circ I_\infty = I_\infty$ とし、I_∞, $I_{-\infty} \notin S$ とする。さらにネットワーク $G = (V, A)$ は長さ C_p が $R(\circ) > C_p$ をみたす閉路は存在しないものとする。このとき上記 (3)~(4) で構成される逐次列は高々 $N-1$ step で各頂点 i から終点 N への最短経路の長さに収束する。

以下、前述した様々な 2 項演算が仮定 $a \circ I_\infty = I_\infty \notin S$ を満たすことを示す。

$[\circ = +]$ $\lim_{b \to +\infty} [a + b] = +\infty = I_\infty$,

$[\circ = \times]$ $\lim_{b \to +\infty} [a \times b] = +\infty = I_\infty$ $(a > 0)$,

[2 パラメータ乗加法型] $a \in S$ ならば $1 + t(s + a) > 0$ なので

$$\lim_{b \to I_\infty} [\{1 + t(s+a)\}b + (a+s)(1+st)] = \begin{cases} +\infty, & \text{for } t > 0 \\ -(1+st)/t, & \text{for } t < 0 \end{cases} = I_\infty \notin S.$$

[2 パラメータ分数型]

$$\lim_{b \to -t+1/s} \left[\frac{a + b + 2t}{1 + s^2(a+t)(b+t)} - t \right] = \frac{a + t + 1/s}{1 + sa + st} - t = -t + 1/s = I_\infty \notin S.$$

最短経路の求め方は以下の通りである：

$$f_i^{(k)} = \min_{j \in D(i)} [t_{ij} \circ f_j^{(k-1)}] = t_{i\pi^{(k)}(i)} \circ f_{\pi^{(k)}(i)}^{(k-1)},$$

$$\hat{j} = \pi^{(N-2)}(i),\ \hat{k} = \pi^{(N-3)}(\hat{j}),\ \ldots, N = \pi^{(k)}(\hat{m}).$$

このとき

$$(i, \hat{j}, \hat{k}, \ldots, \hat{m}, N)$$

が節点 i から 終点 N への最短経路である。

以下、具体例を述べる。

例 1 . 図 1 のようなネットワーク上で乗法型問題（路長が 乗法で定義された問題）を考える。このネットワークには $C_p < 1$ を満たす閉路は存在していない。そこで表 1 からわかるように逐次列 $\{f_i^{(k)}\}$ は第 4 ステップで各頂点 i から終点への最短路長に収束している。また各頂点 i から終点への最短経路は表 3 より、

$$(1, \pi^{(4)}(1), \pi^{(3)}(3),\ \pi^{(2)}(2),\ \pi^{(1)}(4)) = (1, 3, 2, 4, 6)$$

であることがわかる。

例 2 . 図 2 のようなネットワーク上で乗法型問題を考える。表 3 を見ると逐次列は第 5 (= N - 1) ステップで収束していない。したがって定理 1 より $C_p < 1$ を満たす閉路がネットワーク上に存在していることがわかる（$C_p < 1$ を満たす閉路が検出された）。実際、閉路 $(3, 5, 4, 3)$ の長さ C_p は $\frac{3}{4}$ で 1 より小さい。

例 3 . 図 3 のようなネットワーク上で、道の長さが $a + b - ab$ で定義された問題（ 2 パラメータ乗加法型問題の 1 つ）を考える。このネットワークには $C_p < 0$ を満たす閉路は存在していない。そこで表 4 からわかるように逐次列 は第 4 ステップで各頂点 i から終点への最短路長に収束している。また表 5 より最短経路は $(1, 3, 5, 6)$ であることがわかる。

例 4 . 図 4 のようなネットワーク上で、道の長さが $\frac{a+b}{1+ab}$ で定義された問題（ 2 パラメータ分数型問題の 1 つ）を考える。このネットワークには $C_p < 0$ を満たす閉路は存在していない。そこで表 6 からわかるように逐次列 は第 3 ステップで各頂点 i から終点への最短路長に収束している。また表 7 より最短経路は $(1, 2, 4, 6)$ であることがわかる。

例 5 . 図 5 のようなネットワーク上で、道の長さが $\frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$ で定義された問題（ 2 パラメータ分数型問題の 1 つ）を考える。このネットワークには $C_p < 1$ を満たす閉路は存在していない。そこで表 8 からわかるように逐次列 は第 3 ステップで各頂点 i から終点への最短路長に収束している。また表 9 より最短経路は $(1, 3, 2, 5, 6)$ であることがわかる。

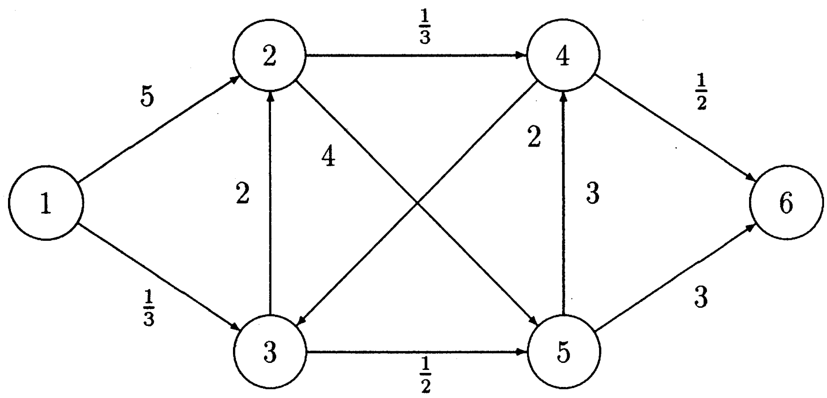

図 1: $a \circ b = a \times b,\ S = (0, +\infty),\ \forall C_p \geq 1$

表 1:

Node	$f_i^{(0)}$	$f_i^{(1)}$	$f_i^{(2)}$	$f_i^{(3)} = f_i$	$f_i^{(4)}$
1	∞	∞	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
2	∞	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	∞	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
5	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
6	1	1	1	1	1

表 2:

Node	$\pi^{(1)}(i)$	$\pi^{(2)}(i)$	$\pi^{(3)}(i)$
1	2 or 3	3	3
2	4	4	4
3	5	2	2
4	6	6	6
5	4	4	4

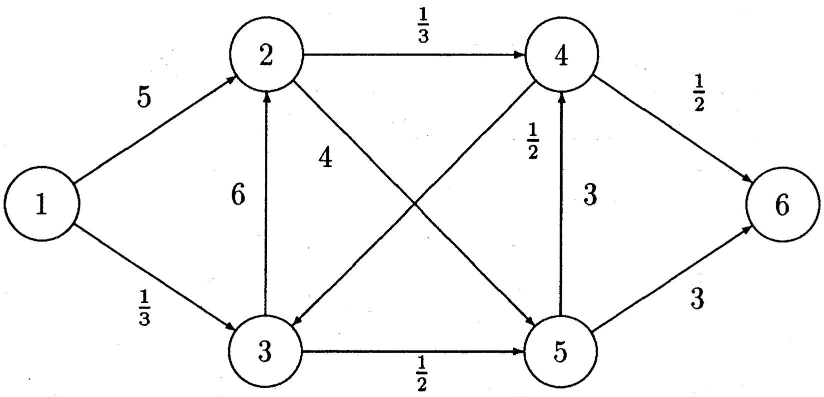

図 2: $a \circ b = a \times b,\ S = (0, +\infty),\ \exists C_p < 1$

表 3:

Node	$f_i^{(0)}$	$f_i^{(1)}$	$f_i^{(2)}$	$f_i^{(3)}$	$f_i^{(4)}$	$f_i^{(5)}$	$\cdots$
1	∞	∞	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
2	∞	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$
3	∞	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\cdots$
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\cdots$
5	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\cdots$
6	1	1	1	1	1	1	$\cdots$

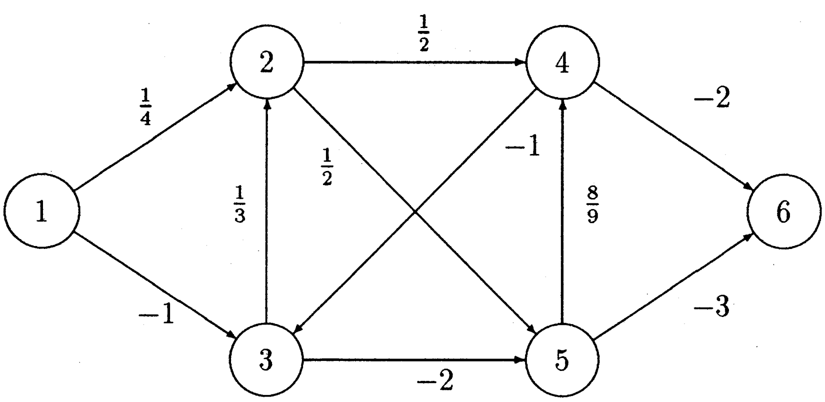

図 3: $a \circ b = a + b - ab,\ \ S = (-\infty, 1) \ni 0 = R(\circ),\ \forall C_p \geq 0$

表 4:

Node	$f_i^{(0)}$	$f_i^{(1)}$	$f_i^{(2)}$	$f_i^{(3)} = f_i$	$f_i^{(4)}$
1	$1 = I_\infty$	1	-23	-23	-23
2	1	-1	-1	-11	-11
3	1	-11	-11	-11	-11
4	-2	-2	-23	-23	-23
5	-3	-3	-3	-3	-3
6	0	0	0	0	0

表 5:

Node	$\pi^{(1)}(i)$	$\pi^{(2)}(i)$	$\pi^{(3)}(i)$	$\pi^{(4)}(i)$
1	2 or 3	3	3	3
2	5	5	4	4
3	5	5	5	5
4	6	3	3	3
5	6	6	6	6

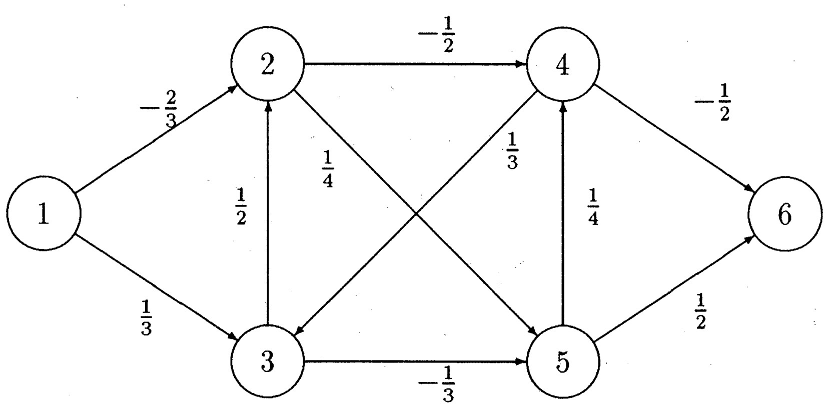

図 4: $a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}$, $S = (-1,1) \ni 0 = R(\circ)$, $\forall C_p \geq 0$

表 6:

Node	$f_i^{(0)}$	$f_i^{(1)}$	$f_i^{(2)} = f_i$	$f_i^{(3)}$
1	$1 = I_\infty$	1	$-\frac{22}{23}$	$-\frac{22}{23}$
2	1	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{4}{5}$
3	1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{13}{23}$	$-\frac{13}{23}$
4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{2}{7}$
6	0	0	0	0

表 7:

Node	$\pi^{(1)}(i)$	$\pi^{(2)}(i)$	$\pi^{(3)}(i)$
1	2 or 3	2	2
2	4	4	4
3	5	5	5
4	6	6	6
5	4	4	4

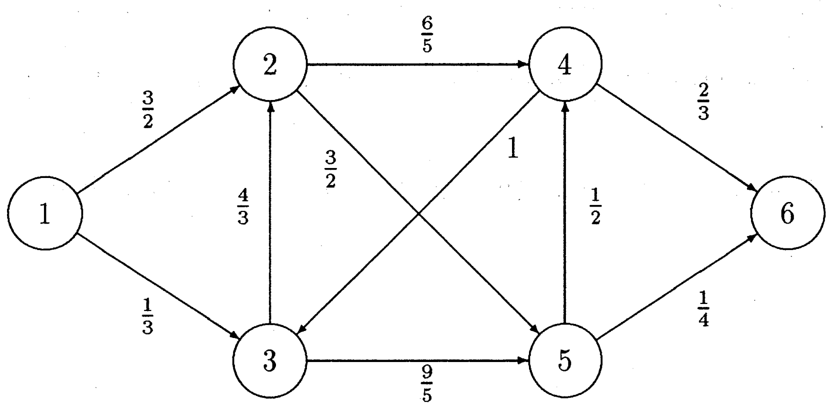

図 5: $a \circ b = \frac{ab}{1+(1-a)(1-b)}$, $S = (0,2) \ni 1 = R(\circ)$, $\forall C_p \geq 1$

表 8:

Node	$f_i^{(0)}$	$f_i^{(1)}$	$f_i^{(2)} = f_i$	$f_i^{(3)} = f_i$	$f_i^{(4)}$
1	$2 = I_\infty$	2	$\frac{9}{22}$	$\frac{12}{41}$	$\frac{12}{41}$
2	2	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
3	2	$\frac{9}{8}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{12}{13}$
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
6	1	1	1	1	1

表 9:

Node	$\pi^{(1)}(i)$	$\pi^{(2)}(i)$	$\pi^{(3)}(i)$
1	2 or 3	3	3
2	5	5	5
3	5	2	2
4	6	6	6
5	6	6	6

参考文献

[1] Y.Maruyama: Shortest and longest path problems, Optimization, 38(1996), 287-299.

[2] Y.Maruyama: On associative shortest path problems, to appear in Bull. Inform. Cybernet.(1997)

[3] Y.Maruyama: Associative shortest and longest path problems, submitted.